

Mécanique:

Chapitre 1: Représentation mathématique

Rappel mathématique:

Repérages: Pour connaître le mvmt d'un point matériel il faut connaître sa position dans l'espace.

⇒ faire un repérage dans l'espace et dans le temps

+ Repérage dans le temps:

+ Il faut une horloge pour mesurer le temps. L'unité de mesure dans le SI est: s

+ Repérage dans l'espace:

+ Il faut fixer un référentiel et un système de coordonnées

+ un corps est en mvmt par rapport à un objet solide est un référentiel

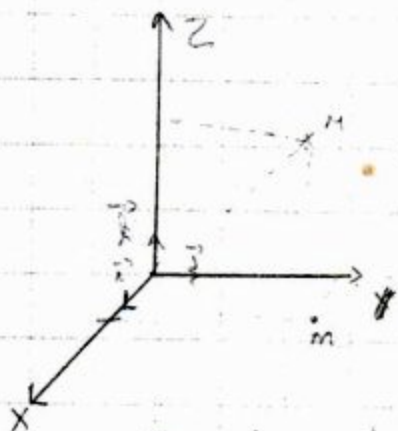
+ Il faut rattacher à ce référentiel qui s'adapte au type du mvmt

+ l'objet qui nous entoure est à 3 dims, ainsi que l'espace qui nous entoure pour se repérer dans l'espace on fixe des directions et un point d'origine.

Exemple:

- le repère cartésien: $R(O; x, y, z)$

- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: base cartésienne: base orthonormée directe.



\vec{OM} : vect position.

$O \equiv$ point d'app.

M : l'extrémité de \vec{OM}

sens: O vers M

direction: celle de la droite qui passe par O et M .

module: distance OM .

Type de vecteurs:

- vecteur lié: c'est un vect dont on précise l'origine (vect vitesse \vec{v})

- Vecteur glissant : c'est un vect dont on ne précise le support (vect force)
 La position exacte du vect du le support n'a pas d'influence sur son effet

Ex: - Tension du fil \vec{T}

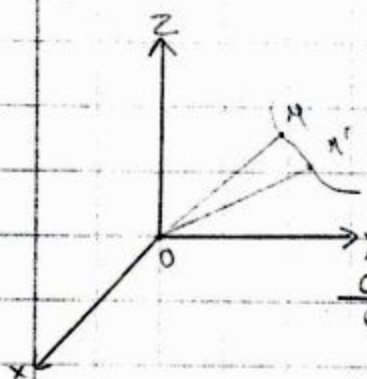
- Poids d'une particule \vec{P} .

Derivée d'un vect

Soit \vec{u} un vect qui dépend du temps t

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t}$$

si on a : $\vec{u} = \vec{OR}$: vect position.



Quand t varie l'extrémité M de \vec{u} décrit un courbe

$$(C) \quad \vec{u}(t) = \vec{OR}$$

$$\vec{u}(t+\Delta t) = \vec{OR'}$$

$$\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t) = \vec{RR'}$$

$\frac{d\vec{u}}{dt}$ est un vect tangent à (C) au point M.

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{OR}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{RR'}}{\Delta t}$$

après:

$$\frac{d(\lambda \vec{u})}{dt} = \lambda \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{u} \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d(\vec{u} \wedge \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (w, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$$

Représentation d'un vecteur par un support et un point

+ soit un vecteur \vec{v} d'origine A. $\vec{v} = \vec{AP}$

Soit un point O de l'espace le moment de \vec{v} par rapport à O est

$$M_O(\vec{v}) = \vec{OA} \wedge \vec{v}$$

\Rightarrow Module

$$\|M_O(\vec{v})\| = \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \alpha$$

\rightarrow Si on considère un autre point de l'espace O'

$$M_{O'}(\vec{v}) = \vec{O'A} \wedge \vec{v}$$

$$= (\vec{OO'} + \vec{OA}) \wedge \vec{v}$$

$$= (\vec{OO'} \wedge \vec{v}) + (\vec{OA} \wedge \vec{v})$$

$$M_{O'}(\vec{v}) = \vec{OO'} \wedge \vec{v} + M_O(\vec{v})$$

$$M_{O'}(\vec{v}) = M_O(\vec{v}) + \vec{OO'} \wedge \vec{v}$$

$$M_O(\vec{v}) = M_{O'}(\vec{v}) + \vec{OO'} \wedge \vec{v}$$

* Moment d'un vecteur \vec{v} à un axe

Soit un axe (Δ) auquel on associe un vecteur unitaire \vec{u} et on considère un point $O \in (\Delta)$

$$\Rightarrow M_{\Delta}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot M_O(\vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{v})$$

Si on considère un autre pt O' de (Δ)

$$M_{\Delta}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot M_{O'}(\vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot (\vec{O'A} \wedge \vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot ((\vec{OO'} + \vec{OA}) \wedge \vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot ((\vec{OO'} \wedge \vec{v}) + (\vec{OA} \wedge \vec{v}))$$

or: O' et $O \in (\Delta) \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{OO'}$ sont colinéaires

$$\Rightarrow \text{P. mixte } \vec{u} \cdot (\vec{OO'} \wedge \vec{v}) = 0$$

$$\text{donc } M_{\Delta}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{v})$$

c/c: le moment de \vec{v} % à (Δ) ne change pas si on change le pt de (Δ)

Exemple: Soit la fonction

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xye^3$$

calculer les D.P. suivantes:

$$f_x, f_y, f_z, f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, f_{xy}, f_{yz}, f_{xz}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + ye^3$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + xe^3$$

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + xye^3$$

* D.P secondes

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$f_{zz} = 2 + xye^3$$

* D.P secondes croisées

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = e^3 \quad ; \quad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = e^3$$

$$f_{yz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = xe^3 \quad ; \quad f_{zy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = xe^3$$

$$f_{xz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = ye^3 \quad ; \quad f_{zx} = ye^3$$

C/c : f est continue donc

$$f_{xy} = f_{yx} \quad ; \quad f_{yz} = f_{zy} \quad ; \quad f_{xz} = f_{zx}$$

La différentielle totale

+ la somme des dérivées partielles multipliées par l'accroissement dû à chacune des variables

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$$

Pour les accroissements infinitésimaux on écrit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\text{On } df = \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{r}$$

où $\vec{\text{grad}} f$ a les dérivées partielles

$$\vec{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Pour l'exemple on trouve

$$df = (2x + ye^3) dx + (2y + xe^3) dy + (2z + xye^3) dz$$

Equ. diff.

1 - Equ. diff. du 1^{er} ordre :

$$R(t; x(t); \frac{dx(t)}{dt}) = 0(t)$$

$x(t)$: fct inconnue à déterminer

Résoudre cette eqn c'est déterminer la fct $x(t)$. On montre que :

La solution met en jeu un cte qui doit être déterminé pour cela on impose une condition initiale sur la fct $x(t)$. Par exemple on nous donne à $t=t_0$ $x=x_0$.

i. Eque. diff à variables séparées

$$(1) \frac{dx}{dt} = \frac{g(t)}{f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \int f(x) dx = \int g(t) dt$$

$$F(x) = G(t) + K$$

où F et G sont les primitives de f et g .

Exemple:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x+1}{t+1} = 0 \quad \begin{matrix} x > 0 \\ t > 0 \end{matrix}$$

Cond: à $t=0$, $x=0$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x+1}{t+1} \Leftrightarrow \frac{dx}{x+1} = \frac{dt}{t+1} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{dt}{t+1}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln(t+1) + K$$

$$K=? \text{ à } t=0; x=0 \Rightarrow K=0$$

$$\ln(x+1) = \ln(t+1)$$

$$x+1 = t+1 \Leftrightarrow x=t \Rightarrow x(t)=t$$

ii. Eque homogènes:

$$(1) \text{ s'écrit sous la forme: } \frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

Exemple:

$$t x \cdot \frac{dx}{dt} - (t^2 + x^2) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2 + x^2}{t x}$$

$$\frac{dx}{dt} = t \left(\frac{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2}{\frac{x}{t}} \right) = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

$$\text{on pose } u = \frac{x}{t} \Rightarrow x = u \cdot t$$

$$\frac{dx}{dt} = t \cdot \frac{du}{dt} + u = u + t \frac{du}{dt}$$

$$\begin{aligned} (2) \Rightarrow x + t \frac{du}{dt} &= \frac{1-u^2}{u^2} \\ u^2 + u t \frac{du}{dt} &= 1 + u^2 \\ u \frac{du}{dt} &= \frac{1}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int u du &= \int \frac{dt}{t} \\ \frac{u^2}{2} &= \log t + c = \log(Kt) \quad (K > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2t^2} &= \log(Kt) + c \\ x(t) &= t\sqrt{2} \cdot \sqrt{\log(Kt) + c} \\ x(t) &= t \sqrt{2(\log t + K)} \end{aligned}$$

iii/ Ecu linéaire:

s'écrit sous la forme:

$$\frac{dx}{dt} + x f(t) = g(t)$$

La résolution se procède comme pour l'exemple suivant

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} = t^2 \quad (\text{à } t=1; x=1)$$

La résolution se fait en 2 étapes:

1^{ère} étape: on résout l'équation sans second membre

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} = 0$$

$\Rightarrow x(t) = c \cdot t$ où c est une cte

2^{ème} étape: on utilise la méthode appelée méthode de la variation de

la cte et on transforme $x(t) = ct \Rightarrow$ on remplace $x(t)$ ds l'équ avec second membre (A.V.S)

$$\frac{d(c(t) \cdot t)}{dt} - \frac{c(t) \cdot t}{t} = t^2$$

$$t \frac{dc(t)}{dt} + c(t) \frac{dt}{dt} - c(t) = t^2$$

$$t \frac{dc(t)}{dt} = t^2$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = t$$

$$C(t) = \int t dt$$

$$C(t) = \frac{t^2}{2} + k$$

alors la sol est $x(t) = \left(\frac{t^2}{2} + k\right)t$.

$$at = 1 \quad x = 1 \quad : \quad 1 = \frac{1}{2} + k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

la sol générale est : $x(t) = \frac{1}{2}(t^3 + t)$.

2. Eq diff du 2^{ème} ordre

Elles sont de la forme : $R\left(t; x; \frac{dx}{dt}; \frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0$

on trouve ici un cas particulier le plus souvent rencontré :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a \frac{dx}{dt} + bx = f(t) \quad (a, b \text{ sont des ctes})$$

la solution générale est la somme de la sol générale particulière et de la sol de l'équ ss m.

$$x_g(t) = x_{ssm}(t) + x_p(t)$$

1^{ère} étape : comment retrouver les sol $x_{ssm}(t)$

$$\text{Eq ss m : } \frac{d^2x}{dt^2} + 2a \frac{dx}{dt} + bx = 0$$

la sol est de type e^{rt} où r est à déterminer en remplaçant dans (1)

$$\frac{de^{rt}}{dt} = re^{rt} \text{ et } \frac{d^2e^{rt}}{dt^2} = r^2e^{rt}$$

(1) $\Rightarrow (r^2 + 2ar + b = 0)$: c'est l'équ caractéristique du même r est déterminé selon le signe de $\Delta' = a^2 - b$ 3 cas distingués

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } \Delta' > 0 \quad a^2 > b$$

$$\text{deux racines réelles } r_{1,2} = -a \pm \sqrt{\Delta'}$$

\Rightarrow 2 solutions $e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$

pp^{tes} : si x_1 et x_2 sont 2 solutions de l'équ alors tt combinaison linéaire de la forme $(c_1 x_1 + c_2 x_2)$ est aussi une sol la sol de l'équ ss m est donc ce cas est : $x_{ssm}(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas : } \Delta' < 0 \quad (a^2 < b)$$

$$\Rightarrow \text{2 racines complexes } r_{1,2} = -a \pm i \sqrt{b - a^2} = -a \pm i \omega$$

\Rightarrow la sol est alors :

$$\begin{aligned} x_{ssm}(t) &= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \\ &= C_1 e^{(-a + i\omega)t} + C_2 e^{(-a - i\omega)t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-at} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \\
 &= e^{-at} [C_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) + C_2 (\cos \omega t - i \sin \omega t)] \\
 &= e^{-at} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)
 \end{aligned}$$

$$A = C_1 + C_2$$

$$B = (C_1 - C_2)i$$

$$\Delta' = 0$$

La racine de l'équ. caractéristique est unique $r = -a$
 c'est la solution est écrite sous la forme $x(t) = c(t)e^{rt}$ où $c(t)$
 est une fct à déterminer.

→ remplaçons $c(t)$ dans l'éq ss.m.

$$\begin{aligned}
 * \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} (c(t) \cdot e^{rt}) = \frac{dc}{dt} \cdot e^{rt} + c(t) \cdot r \cdot e^{rt} \\
 * \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2c(t)}{dt^2} \cdot e^{rt} + \frac{dc(t)}{dt} \cdot r \cdot e^{rt} + c(t) \cdot r^2 \cdot e^{rt} \\
 &= \frac{d^2c(t)}{dt^2} \cdot e^{rt} + 2r e^{rt} \frac{dc(t)}{dt} + r^2 c(t) \cdot e^{rt}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2a \frac{dx}{dt} + bx = f(t).$$

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} e^{rt} + (2a + 2a) e^{rt} + (r^2 + 2ar + b) c \cdot e^{rt} = 0.$$

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} = 0.$$

$$\Rightarrow 1^{\text{ère}} \text{ intégration} \Rightarrow \frac{dc(t)}{dt} = C_1$$

$$c(t) = C_1 t + C_2$$

$$\text{La sol est alors } x(t) = (C_1 t + C_2) e^{-at} \quad \text{si } (\Delta' = 0).$$

Recherche de la solution particulière:

La solution particulière est trouvée selon le type de la fct qui
 existe en second membre de l'éq générale: $f(t)$.

- Si $f(t) = ct$, la solution est prise une ct.

- Si $f(t)$ est un polynôme de degré n alors x_p est aussi un polynôme
 de n degré.

- Si $f(t) = a \sin rt + b \cos rt \Rightarrow x_p$ sera: $a_0 \sin rt + b_0 \cos rt$

a_0, b_0 des ctes. pour les trois cas la substitution de la sol particulière x_p dans l'éq ~~générale~~ SS m. permet de déterminer ses coefficients

Ex: Résoudre $\frac{dx^2}{dt^2} - x = t^2 \cdot t$ avec les cond. initiales pour $t=0; x=2$
 $\frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 1$

→ Eq SS m: $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0 \rightarrow$ eq caract: $r^2 - 1 = 0$

2 racines: $x(t) = A e^t + B e^{-t}$

x_p ? : le second membre est un poly de deg = 2.

$\Rightarrow x_p(t) = a t^2 + b t + c$

$\frac{dx_p}{dt} = 2at + b \Rightarrow \frac{d^2x_p(t)}{dt^2} = 2a$

Da l'éq (A.S.M) $\Rightarrow 2a - at^2 - bt - c = t^2 \cdot t$

$\Rightarrow -at^3 - bt + (2a - c) = t^3 \cdot t$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ 2a - c = 0 \Rightarrow c = 2a = -2 \end{cases}$$

$x_p(t) = -t^2 + t - 2$

la solution générale est: $x_g(t) = A e^t + B e^{-t} - t^2 + t - 2$. à déterminer A et B.

$t=0 \quad x_g(0) = A + B - 2 = 2$

$\frac{dx}{dt} = A e^t - B e^{-t} - 2t + 1$

$\frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = A - B + 1 = 1 \Rightarrow A = B \Rightarrow 2A - 2 = 2 \Rightarrow A = B = 2$

$x_g(t) = 2(e^t + e^{-t}) - t^2 + t - 2$

Rappel sur les fct hyperboliques:

$$\text{ch } wt = \frac{e^{wt} + e^{-wt}}{2}$$

$$\text{sh } wt = \frac{e^{wt} - e^{-wt}}{2}$$

$$\text{ch}' wt = \text{sh } wt$$

$$\text{sh}' wt = \text{ch } wt$$

$$\text{ch}^2 wt - \text{sh}^2 wt = 1$$



ETU UP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Diapo
Chimie
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..